

# АНАЛИЗ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЫ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ СПЕЦИАЛЬНЫЙ КЛАСС ДВУМЕРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Ю. В. Шанько\*

Рассмотрим переопределенную систему уравнений

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + vv_y + p_x &= 0, \\ v_t + uv_x + vv_y + p_y &= 0, \\ u_x + v_y &= 0, \\ p_t + up_x + vp_y &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $t$  — время,  $x, y$  — пространственные координаты,  $u, v$  — компоненты вектора скорости,  $p$  — отклонение давления от заданной величины  $p_0$ .

Система (1) является двумерным аналогом общей трехмерной системы, задача исследования на совместность которой была поставлена в статье Л.В. Овсянникова [1]. Эта система описывает так называемые тепловые (с постоянной плотностью) движения политропного газа. К этой же системе сводятся изотермические (с постоянной скоростью звука) движения газа при показателе адиабаты не равном 1.

Анализ системы (1) удобнее выполнять в специальных лагранжевых координатах [2]. За лагранжеву переменную  $\eta$  выбирается давление ( $\eta = p$ ), а вторая переменная  $\xi$  задается так, чтобы якобиан перехода от  $x, y$  к  $\xi, \eta$  равнялся 1. Следует отметить, что  $\xi$  этим условием определяется неоднозначно. Полученная система состоит из линейных уравнений

$$x_\xi = -y_{tt}, \quad y_\xi = x_{tt} \tag{2}$$

и нелинейного уравнения

$$x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi = 1. \tag{3}$$

---

\* «Институт вычислительного моделирования СО РАН» ФИЦ КНЦ СО РАН; shy70@mail.ru

Заметим, что данный переход к лагранжевым координатам осуществим только при условии  $p \neq \text{const}$ . Движения газа с условием  $p = \text{const}$  рассмотрены в работе Л.В. Овсянникова[3].

В работе М.В. Нецадима и А.П. Чупахина [2] показано, что общее решение системы (2), (3) не может зависеть от произвольной функции двух переменных и содержит не более четырех произвольных функций одной переменной. В статье С.В. Хабирова [4] заявлено о построении общего решения аналога системы (2), (3). Следует отметить, что Теорема 2 работы [4] является неверной, контрпример к ней построен в последнем разделе данной статьи. Поэтому утверждение автора [4] о том, что полученные в его статье формулы задают общее решение (2), (3), осталось недоказанным. Кроме того, приведенный в указанной работе список точных решений не является полным. Система эквивалентная (1) изучалась в статье Н.А. Иногамова [5] в связи с исследованиями по лазерному термоядерному синтезу. В указанной статье автор рассмотрел два класса решений и заявил (без доказательства), что других решений не существует.

В [2] показано, что система (2), (3) допускает группу непрерывных преобразований, порождаемую операторами

$$\begin{aligned} X_1 &= \varphi(\eta)\partial_\xi, & X_2 &= \partial_\eta, & X_3 &= t\partial_x, & X_4 &= t\partial_y, \\ X_5 &= \partial_x, & X_6 &= \partial_y, & X_7 &= \partial_t, & X_8 &= -y\partial_x + x\partial_y, \\ X_9 &= t\partial_t + 2\xi\partial_\xi - 2\eta\partial_\eta, & X_{10} &= x\partial_x + y\partial_y + 2\eta\partial_\eta. \end{aligned} \quad (4)$$

## 1 Приведение системы к пассивному виду

Прежде всего сделаем некоторые замечания. Все рассмотрение ведется локально, все функции считаются дифференцируемыми нужное число раз. Объемные вычисления проводились с помощью системы компьютерной алгебры REDUCE [6]. Под совместностью системы уравнений понимается наличие у нее непустого множества решений.

Введя комплекснозначную функцию  $z = x + iy$ , перепишем систему (2), (3) следующим образом:

$$z_\xi = iz_{tt}, \quad (5)$$

$$\frac{i}{2}(z_\xi \bar{z}_\eta - \bar{z}_\xi z_\eta) = 1 \quad (6)$$

(черта над символом обозначает комплексное сопряжение).

Целью настоящего раздела является приведение системы (5), (6) к пассивному виду [7].

Вначале, вместо системы (5), (6) будет удобно рассматривать векторную систему, которая является ее следствием. Введем в двумерном векторном пространстве билинейную кососимметрическую форму. Для векторов  $\mathbf{a} = (a^1, a^2)$  и  $\mathbf{b} = (b^1, b^2)$  положим

$$\mathbf{a} \vee \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a^1 & b^1 \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}.$$

Из (5), (6) следует, что вектор  $\mathbf{z} = (z^1, z^2) = (z_\xi, z_\eta)$  удовлетворяет уравнениям:

$$\mathbf{z}_\xi = i\mathbf{z}_{tt}, \quad (7)$$

$$\frac{i}{2} \mathbf{z} \vee \bar{\mathbf{z}} = 1. \quad (8)$$

Положим

$$\alpha = \frac{i}{2} \mathbf{z} \vee \bar{\mathbf{z}},$$

$$\beta = \frac{1}{2} (\mathbf{z}_t \vee \bar{\mathbf{z}} - \mathbf{z} \vee \bar{\mathbf{z}}_t),$$

$$\gamma = -\frac{i}{2} (\mathbf{z}_{tt} \vee \bar{\mathbf{z}} - 2\mathbf{z}_t \vee \bar{\mathbf{z}}_t + \mathbf{z} \vee \bar{\mathbf{z}}_{tt}),$$

$$\delta = -\frac{1}{2} (\mathbf{z}_{ttt} \vee \bar{\mathbf{z}} - 3\mathbf{z}_{tt} \vee \bar{\mathbf{z}}_t + 3\mathbf{z}_t \vee \bar{\mathbf{z}}_{tt} - \mathbf{z} \vee \bar{\mathbf{z}}_{ttt}),$$

$$\varepsilon = \frac{i}{2} (\mathbf{z}_{tttt} \vee \bar{\mathbf{z}} - 4\mathbf{z}_{ttt} \vee \bar{\mathbf{z}}_t + 6\mathbf{z}_{tt} \vee \bar{\mathbf{z}}_{tt} - 4\mathbf{z}_t \vee \bar{\mathbf{z}}_{ttt} + \mathbf{z} \vee \bar{\mathbf{z}}_{tttt}).$$

Функции  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$  выбраны так, что они являются вещественными и в силу уравнения (7) справедливы соотношения:

$$\alpha_\xi + \beta_t = \beta_\xi + \gamma_t = \gamma_\xi + \delta_t = \delta_\xi + \varepsilon_t = 0. \quad (9)$$

**Лемма 1.** *Положим*

$$\Delta_1 = -4(\alpha\alpha_{tt} - \alpha_t^2 + \alpha\gamma - \beta^2),$$

$$\Delta_2 = 2(\alpha\alpha_{ttt} - \alpha_t\alpha_{tt} + \alpha\gamma_t + \gamma\alpha_t - 2\beta\beta_t),$$

$$\Delta_3 = 2(\beta\alpha_{tt} - 2\alpha_t\beta_t + \alpha\beta_{tt} + \alpha\delta - \beta\gamma),$$

$$\Delta_4 = -\alpha_t\alpha_{ttt} + \alpha_{tt}^2 - \alpha_t\gamma_t + \beta\beta_{tt} + \beta\delta - \gamma^2,$$

$$\Delta_5 = -\beta\alpha_{ttt} + 2\beta_t\alpha_{tt} - \alpha_t\beta_{tt} - \alpha_t\delta + 2\gamma\beta_t - \beta\gamma_t.$$

Тогда справедливо тождество

$$\Delta_1 \mathbf{z}_{tt} + (\Delta_2 + i\Delta_3) \mathbf{z}_t + (\Delta_4 + i\Delta_5) \mathbf{z} = 0. \quad (10)$$

Кроме того, неравенство  $\Delta_1 \neq 0$  эквивалентно условию

$$\mathbf{z}_t \vee \mathbf{z} \neq 0. \quad (11)$$

*Доказательство.* Рассмотрим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 \\ z_{tt}^1 & z_t^1 & iz_t^1 & z^1 & iz^1 \\ z_{tt}^2 & z_t^2 & iz_t^2 & z^2 & iz^2 \\ \overline{z_{tt}^1} & \overline{z_t^1} & -i\overline{z_t^1} & \overline{z^1} & -i\overline{z^1} \\ \overline{z_{tt}^2} & \overline{z_t^2} & -i\overline{z_t^2} & \overline{z^2} & -i\overline{z^2} \end{vmatrix}.$$

Раскроем  $\Delta$  по первой строке. Функции  $\Delta_j$  подобраны так, чтобы они были равны соответствующим алгебраическим дополнениям (в этом можно убедиться непосредственным вычислением). Получим тождество:

$$\Delta = \Delta_1 m_1 + \Delta_2 m_2 + \Delta_3 m_3 + \Delta_4 m_4 + \Delta_5 m_5.$$

Если подставить в определитель  $\Delta$  вместо первой строки вторую или третью, то он, очевидно, занулится. Получаем соотношения

$$\Delta_1 z_{tt}^j + (\Delta_2 + i\Delta_3) z_t^j + (\Delta_4 + i\Delta_5) z^j = 0,$$

из которых следует первое утверждение леммы.

Второе утверждение леммы следует из цепочки равенств:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} z_t^1 & iz_t^1 & z^1 & iz^1 \\ z_t^2 & iz_t^2 & z^2 & iz^2 \\ \overline{z_t^1} & -i\overline{z_t^1} & \overline{z^1} & -i\overline{z^1} \\ \overline{z_t^2} & -i\overline{z_t^2} & \overline{z^2} & -i\overline{z^2} \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} z_t^1 & z^1 \\ z_t^2 & z^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \overline{z_t^1} & \overline{z^1} \\ \overline{z_t^2} & \overline{z^2} \end{vmatrix} = 4(\mathbf{z}_t \vee \mathbf{z})(\overline{\mathbf{z}_t \vee \mathbf{z}}).$$

□

Из леммы следует, что при выполнении условия (11) и заданных функциях  $\Delta_j$  вектор-функция  $\mathbf{z}$  удовлетворяет линейному уравнению второго порядка

$$\mathbf{z}_{tt} = 2iK\mathbf{z} + T\mathbf{z}, \quad (12)$$

с коэффициентами

$$K = \frac{i\Delta_2 - \Delta_3}{2\Delta_1}, \quad T = \frac{-\Delta_4 - i\Delta_5}{\Delta_1}.$$

Рассмотрим вначале случай, когда условие (11) не выполняется, т.е., когда  $\mathbf{z}_t \vee \mathbf{z} = 0$ . Это означает, что векторы  $\mathbf{z}_t$  и  $\mathbf{z}$  линейно зависимы:

$$\mathbf{z}_t = S\mathbf{z}. \quad (13)$$

Здесь  $S = S(t, \xi, \eta)$  — некоторая комплекснозначная функция.

**Лемма 2.** *Для совместности системы уравнений (7), (8), (13) необходимо выполнение условий*

$$S + \overline{S} = S_t = S_\xi = 0.$$

*Доказательство.* Продифференцируем (8) по  $t$  в силу уравнения (13):

$$-\frac{1}{4}(S + \overline{S})\mathbf{z} \vee \overline{\mathbf{z}} = 0.$$

Отсюда

$$\overline{S} = -S. \quad (14)$$

Подставим  $\mathbf{z}_t$  из (13) в уравнение (7):

$$\mathbf{z}_\xi = i(S_t + S^2)\mathbf{z}. \quad (15)$$

Из условия совместности уравнений (13) и (15) следует, что

$$S_\xi = i(S_t + S^2)_t. \quad (16)$$

Продифференцируем (8) по  $\xi$  в силу уравнения (15):

$$\frac{1}{2}(\overline{S}_t + \overline{S}^2 - S_t - S^2)\mathbf{z} \vee \overline{\mathbf{z}} = 0.$$

Отсюда, с учетом (14), получаем  $S_t = 0$ , тогда из (16) следует, что и  $S_\xi = 0$ .  $\square$

Из Леммы (2) следует, что  $S = iN$ , где  $N(\eta)$  — некоторая вещественная функция. Запишем уравнение (13) в координатах, с учетом (5):

$$z_{ttt} = iNz_{tt}, \quad (17)$$

$$z_{t\eta} = iNz_\eta. \quad (18)$$

Выписывая условие совместности этой системы, получаем  $N_\eta = 0$ , иными словами,  $N = \text{const}$ . В дальнейшем будет показано, что (17), (18) можно рассматривать как частный случай некоторых более общих уравнений.

Перейдем теперь к рассмотрению случая  $\mathbf{z}_t \vee \mathbf{z} \neq 0$ .

**Лемма 3.** *Справедливо тождество*

$$\begin{aligned} \Omega = & (\alpha_{ttt} + 2\gamma_{tt} + \varepsilon)(\beta^2 - \alpha(\gamma + \alpha_{tt}) + \alpha_t^2) + (\alpha_{tt} + \gamma)(4\beta_t^2 + (\alpha_{tt} - \gamma)^2) + \\ & + \alpha(\beta_{tt} + \delta)^2 + \alpha(\alpha_{ttt} + \gamma_t)^2 + 2(\beta_{tt} + \delta)(\alpha_{tt}\beta - 2\alpha_t\beta_t - \beta\gamma) + \\ & + 2(\alpha_{ttt} + \gamma_t)(\alpha_t\gamma - \alpha_{tt}\alpha_t - 2\beta_t\beta) = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

*Доказательство.* Непосредственным вычислением можно проверить справедливость равенств:

$$\begin{aligned} \Omega = 8i \begin{vmatrix} -2i\alpha & -\beta - i\alpha_t & \frac{i}{2}(\gamma - \alpha_{tt}) - \beta_t \\ \beta - i\alpha_t & \frac{-i}{2}(\gamma + \alpha_{tt}) & \frac{-i}{4}(\gamma + \alpha_{tt})_t - \frac{1}{4}(\delta + \beta_{tt}) \\ \frac{i}{2}(\gamma - \alpha_{tt}) + \beta_t & \frac{-i}{4}(\gamma + \alpha_{tt})_t + \frac{1}{4}(\delta + \beta_{tt}) & \frac{-i}{8}(\alpha_{ttt} + 2\gamma_{tt} + \varepsilon) \end{vmatrix} = \\ = 8i \begin{vmatrix} \mathbf{z} \vee \bar{\mathbf{z}} & \mathbf{z} \vee \bar{\mathbf{z}}_t & \mathbf{z} \vee \bar{\mathbf{z}}_{tt} \\ \mathbf{z}_t \vee \bar{\mathbf{z}} & \mathbf{z}_t \vee \bar{\mathbf{z}}_t & \mathbf{z}_t \vee \bar{\mathbf{z}}_{tt} \\ \mathbf{z}_{tt} \vee \bar{\mathbf{z}} & \mathbf{z}_{tt} \vee \bar{\mathbf{z}}_t & \mathbf{z}_{tt} \vee \bar{\mathbf{z}}_{tt} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Последний определитель равен нулю, поскольку каждый его столбец является линейной комбинацией двух столбцов  $(z^1, z_t^1, z_{tt}^1)$  и  $(z^2, z_t^2, z_{tt}^2)$ .  $\square$

Уравнение (8) дает нам  $\alpha = 1$ . Тогда, дифференцируя уравнения (9) нужное число раз по  $t$ , получаем:

$$\beta_t = \gamma_{tt} = \delta_{ttt} = \varepsilon_{tttt} = 0. \quad (20)$$

Подстановка этих соотношений в (19) дает уравнение

$$(\beta^2 - \gamma)\varepsilon + \delta^2 + \gamma_t^2 - 2\beta\gamma\delta + \gamma^3 = 0. \quad (21)$$

**Лемма 4.** *Если выполнены уравнения (20), (21), то  $\gamma_t = 0$ .*

*Доказательство.* Обозначим  $\gamma_t = \mu$ . Функция  $\gamma$  линейна по  $t$ , поэтому  $\mu$  от  $t$  не зависит. Предположим, что  $\gamma_t = \mu \neq 0$ , тогда, найдутся такие  $\xi_0, \eta_0$ , что  $\mu(\xi_0, \eta_0) \neq 0$ . Возьмем  $t_0$  такое, что  $\gamma(t_0, \xi_0, \eta_0) = \beta^2(\xi_0, \eta_0)$ . Рассмотрим уравнение (21) в точке  $(t_0, \xi_0, \eta_0)$ :

$$\mu^2(\xi_0, \eta_0) + (\beta^3(\xi_0, \eta_0) - \delta(t_0, \xi_0, \eta_0))^2 = 0.$$

Функции  $\mu, \beta, \delta$  вещественные, поэтому  $\mu(\xi_0, \eta_0) = 0$ . Противоречие.  $\square$

Из доказанной леммы и одного из уравнений (9), а именно,  $\gamma_\xi + \delta_t = 0$  следует, что  $\delta_{tt} = 0$ . Значит вместо (20) мы можем записать следующие соотношения:

$$\beta_t = \gamma_t = \delta_{tt} = 0. \quad (22)$$

Используя (22), выпишем формулы для коэффициентов  $K$  и  $T$  из уравнения (12):

$$K = \frac{\delta - \beta\gamma}{4(\gamma - \beta^2)}, \quad T = \frac{\beta\delta - \gamma^2}{4(\gamma - \beta^2)}.$$

Так как, по предположению,  $\mathbf{z}_t \vee \mathbf{z} \neq 0$ , то из Леммы 1 следует, что  $\Delta_1 \neq 0$ , а значит

$$\gamma - \beta^2 \neq 0. \quad (23)$$

Из той же леммы получаем, что  $\mathbf{z}$  удовлетворяет уравнению второго порядка (12). Перейдем от векторной записи уравнений к скалярной. Положим  $\mathbf{z} = (z_\xi, z_\eta)$  и заменим в полученных уравнениях производные  $z_\xi$  в силу (5). Уравнения (10), (6) и условие (11) запишутся следующим образом:

$$z_{tttt} = 2iKz_{ttt} + Tz_{tt}, \quad (24)$$

$$z_{tt\eta} = 2iKz_{t\eta} + Tz_\eta, \quad (25)$$

$$-\frac{1}{2}(z_{tt}\bar{z}_\eta + \bar{z}_{tt}z_\eta) = 1, \quad (26)$$

$$z_{ttt}z_\eta - z_{tt}z_{t\eta} \neq 0. \quad (27)$$

**Лемма 5.** При выполнении условия (23) система, состоящая из уравнений (24), (25), (26), может быть совместна, только если  $\delta_t = 0$ .

*Доказательство.* Введем обозначения:  $c = \gamma - \beta^2$ ,  $d = (\delta - 2\beta\gamma + \beta^3)/c^2$ ,  $f = \beta\beta_\eta d_t - cd_{t\eta}$ ,  $g = dd_{t\eta} - d_t d_\eta$ ,  $h = 2\beta cd - \beta^2 - 3c$ ,  $w = ic^2 d_t z_\eta - c_\eta z_{tt}$ .

Из уравнений (22) следует, что

$$c_t = d_{tt} = f_t = g_t = 0.$$

Из условия (23) получаем, что  $c \neq 0$ . Предположим, что  $d_t = \delta_t/c^2 \neq 0$  и покажем, что в этом случае рассматриваемая система уравнений не имеет решений. Запишем уравнения (24), (25) в новых обозначениях:

$$z_{tttt} = \frac{i}{2}(d + \beta)z_{ttt} + \frac{c}{4}(\beta d - 1)z_{tt}, \quad (28)$$

$$z_{tt\eta} = \frac{i}{2}(d + \beta)z_{t\eta} + \frac{c}{4}(\beta d - 1)z_\eta. \quad (29)$$

Выпишем условие совместности этих уравнений:

$$2idw_t + (\beta d - 1)w - 2i(\beta_\eta + d_\eta c)z_{ttt} - c(\beta d)_\eta z_{tt} = 0. \quad (30)$$

Заметим, что в силу (28), (29) функция  $w$  удовлетворяет уравнению

$$w_{tt} = \frac{i}{2}(d + \beta)w_t + \frac{c}{4}(\beta d - 1)w. \quad (31)$$

Продифференцировав (30) по  $t$  в силу (28), (31), придем к уравнению

$$\begin{aligned} & 2(2id_t - cd^2 - 1)w_t + (2\beta d_t + icd(\beta d - 1))w + \\ & + 2(\beta\beta_\eta + c^2dd_\eta - 2icd_{t\eta})z_{ttt} - c(2(\beta d_t)_\eta + i(\beta_\eta + cd_\eta)(\beta d - 1))z_{tt} = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Повторив эту операцию еще дважды, получим еще два линейных дифференциальных уравнения относительно функций  $z$  и  $w$ . Вместе с (30), (32) они образуют систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно  $z_{ttt}$ ,  $z_{tt}$ ,  $w_t$ ,  $w$ . Эта система должна иметь нетривиальное решение, так как равенство нулю  $z_{tt}$  противоречит (26). Следовательно, определитель системы должен равняться нулю. Приравняв к нулю вещественную и мнимую части определителя, получим:

$$\begin{aligned} & \beta_\eta^2 d_t^2 (36d_t^2 c^2 + h^2) + c\beta_\eta g d_t (c^2 d^2 h - ch - h^2 - 12d_t^2 c^2) - \\ & - 2cdfh\beta_\eta d_t + c^4 g^2 + f(f + \beta c g)(h - c) + c^3 f g d(2 - \beta d) = 0, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} & 3c^3 d_t \beta_\eta g d^2 - 2c(3\beta_\eta f d_t + 2\beta_\eta g d_t \beta c + f g c)d + \\ & + 4f^2 - 2\beta_\eta f d_t \beta + 3\beta_\eta g d_t c^2 + 3f g \beta c - g^2 c^3 = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Левая часть уравнения (34) — многочлен второй степени относительно  $d$ . Нетрудно проверить, что коэффициенты многочлена от  $t$  не зависят, а  $d$  существенно зависит от  $t$ , поскольку, по предположению,  $d_t \neq 0$ . Приравнявая к нулю эти коэффициенты, получим уравнения:

$$\beta_\eta g = 0, \quad (35)$$

$$3\beta_\eta f d_t + 2\beta_\eta g d_t \beta c + f g c = 0, \quad (36)$$

$$4f^2 - 2\beta_\eta f d_t \beta + 3\beta_\eta g d_t c^2 + 3f g \beta c - g^2 c^3 = 0. \quad (37)$$

Покажем, что  $\beta_\eta = 0$ . Предположим, что это не так, тогда из (35) следует, что  $g = 0$ , а из (36), что и  $f = 0$ . Подставив  $f = g = 0$  в (33), получим

$$\beta_\eta^2 d_t^2 (36d_t^2 c^2 + h^2) = 0.$$



Очевидно, что при сделанных предположениях левая часть этого уравнения не может обратиться в ноль.

Итак,  $\beta_\eta = 0$ . Уравнения (36), (37) запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} fg &= 0, \\ 4f^2 + 3fg\beta c - g^2c^3 &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда, в силу того, что  $c \neq 0$ , получаем  $f = g = 0$ . Так как, по определению,  $f = \beta\beta_\eta d_t - cd_{t\eta}$ ,  $g = dd_{t\eta} - d_t d_\eta$  и, как только что было показано,  $\beta_\eta = 0$ , то и  $d_\eta = 0$ . Подставив эти соотношения в (30), (32), получим линейную алгебраическую систему относительно  $w_t$ ,  $w$ :

$$\begin{aligned} 2idw_t + (\beta d - 1)w &= 0, \\ 2(2id_t - cd^2 - 1)w_t + (2\beta d_t + icd(\beta d - 1))w &= 0. \end{aligned}$$

Определитель системы равен  $4id_t + 2(\beta d - 1)$  и отличен от нуля, так как, по предположению,  $d_t \neq 0$ . Следовательно  $w = 0$ , откуда

$$z_\eta = -i \frac{c_\eta}{c^2 d_t} z_{tt}.$$

Подставив  $z_\eta$  в уравнение (26), мы занулим его левую часть, а его правая часть равна 1. Противоречие.  $\square$

Поскольку  $\beta_t = \gamma_t = \delta_t = 0$ , то из формул для  $K$  и  $T$  следует, что  $K_t = T_t = 0$ . Выпишем теперь условия совместности (7) и (12):

$$2iK_\xi \mathbf{z}_t + T_\xi \mathbf{z} = 0.$$

Отсюда следует, что  $K_\xi = T_\xi = 0$ , так как в противном случае  $\mathbf{z}_t \vee \mathbf{z} = 0$ .

Рассмотрим теперь отдельно линейные уравнения (24), (25).

**Лемма 6.** Пусть  $z_{tt} \neq 0$ , выполнено условие (27), функции  $K$  и  $T$  не зависят от  $t$  и  $\xi$  и система уравнений (24), (25) совместна. Тогда при  $K_\eta \neq 0$  каждое ее решение удовлетворяет уравнениям

$$z_{ttt} = iN z_{tt}, \tag{38}$$

$$z_{t\eta} = iN z_\eta - iN^{-2} N_\eta z_{tt}. \tag{39}$$

где  $N$  — некоторая вещественная функция от  $\eta$ . Если же функция  $K$  является константой, то и  $T$  должна быть константой.

*Доказательство.* Выпишем условия совместности уравнений (24), (25):

$$2K_\eta z_{ttt} - iT_\eta z_{tt} = 0. \quad (40)$$

Если  $K_\eta = 0$ , то, так как  $z_{tt} \neq 0$ , то и  $T_\eta = 0$ , иными словами,  $K$  и  $T$  — константы.

Если же  $K_\eta \neq 0$ , то уравнение (40) можно записать в виде (38), причем

$$T_\eta = 2NK_\eta. \quad (41)$$

Выпишем условие совместности (38) и (24) (при  $z_{tt} \neq 0$ ):

$$T = 2KN - N^2. \quad (42)$$

Условие совместности (38) и (25), с учетом (42), запишется так:

$$(2K - N)^2(z_{t\eta} - iNz_\eta) + iN_\eta z_{tt} = 0. \quad (43)$$

Из уравнения (38) и условия (27) следует, что

$$z_{t\eta} \neq iNz_\eta. \quad (44)$$

Подставим  $T$  из (42) в уравнение (41):

$$2(K - N)N_\eta = 0.$$

Покажем, что  $K = N$ . Если это не так, то тогда  $N_\eta = 0$  и из уравнения (43) и условия (44) следует, что  $K = N/2$ . Но тогда, очевидно,  $K$  является константой, что противоречит нашему предположению. Таким образом,  $K = N$ . Подставив  $K$  в (43) и разрешив его относительно  $z_{t\eta}$ , получим уравнение (39).  $\square$

Случай, когда  $K$  и  $T$  являются константами, требует дальнейшего рассмотрения. Положим  $K = k$ ,  $T = k^2 + m$ , где  $k, m \in \mathbb{R}$ . Уравнения (24), (25) запишутся следующим образом:

$$z_{tttt} = 2ikz_{ttt} + (k^2 + m)z_{tt}, \quad (45)$$

$$z_{tt\eta} = 2ikz_{t\eta} + (k^2 + m)z_\eta. \quad (46)$$

Продифференцируем (26) два раза по  $t$  в силу уравнений (45), (46):

$$\begin{aligned} ik(z_{tt}\bar{z}_{t\eta} - \bar{z}_{tt}z_{t\eta} + \bar{z}_{ttt}z_\eta - z_{ttt}\bar{z}_\eta) - (z_{ttt}\bar{z}_{t\eta} + \bar{z}_{ttt}z_{t\eta}) - \\ -(k^2 + m)(z_{tt}\bar{z}_\eta + \bar{z}_{tt}z_\eta) = 0. \end{aligned} \quad (47)$$

Выразим  $\bar{z}_\eta$  из уравнения (26):

$$\bar{z}_\eta = \frac{-z_\eta \bar{z}_{tt} - 2}{z_{tt}}. \quad (48)$$

Подставим найденное  $\bar{z}_\eta$  в (47):

$$i(i z_{tt} \bar{z}_{ttt} - i \bar{z}_{tt} z_{ttt} - 2k z_{tt} \bar{z}_{tt})(z_{tt} z_{t\eta} - z_\eta z_{ttt}) - 2(z_{ttt}^2 - 2ik z_{tt} z_{ttt} - (k^2 + m) z_{tt}^2) = 0. \quad (49)$$

Предположим, что

$$i z_{tt} \bar{z}_{ttt} - i \bar{z}_{tt} z_{ttt} - 2k z_{tt} \bar{z}_{tt} \neq 0, \quad (50)$$

тогда из уравнения (49) можно выразить  $z_{t\eta}$ :

$$z_{t\eta} = \frac{z_\eta z_{ttt}}{z_{tt}} - 2i \frac{z_{ttt}^2 - 2ik z_{tt} z_{ttt} - (k^2 + m) z_{tt}^2}{z_{tt}(i z_{tt} \bar{z}_{ttt} - i \bar{z}_{tt} z_{ttt} - 2k z_{tt} \bar{z}_{tt})}. \quad (51)$$

Если же условие (50) не выполняется, то из (49) получаем уравнения:

$$\bar{z}_{tt} z_{ttt} - z_{tt} \bar{z}_{ttt} - 2ik z_{tt} \bar{z}_{tt} = 0, \quad (52)$$

$$-z_{ttt}^2 + 2ik z_{tt} z_{ttt} + (k^2 + m) z_{tt}^2 = 0. \quad (53)$$

**Лемма 7.** Пусть  $z_{tt} \neq 0$  и выполнено условие (27), тогда система уравнений (46), (52), (53) совместна только при  $k = m = 0$ .

*Доказательство.* Из (53) следует, что

$$z_{ttt} = l z_{tt}, \quad (54)$$

где  $l$  — корень квадратного уравнения

$$l^2 - 2ikl - k^2 - m = 0. \quad (55)$$

Подставив (54) в (52), приходим к соотношению

$$2ik = l - \bar{l}, \quad (56)$$

Подставив  $2ik$  из (56) в (55), получим  $k^2 + m = l\bar{l}$ . Используя найденные соотношения между константами, перепишем уравнение (46) в следующем виде:

$$z_{tt\eta} = (l - \bar{l}) z_{t\eta} + l\bar{l} z_\eta. \quad (57)$$

Выписав условие совместности уравнений (54) и (57), получим

$$\bar{l}^2 (z_{t\eta} - l z_\eta) = 0.$$

Из (54) и условия (27) следует, что  $z_{t\eta} \neq l z_\eta$ , поэтому  $l = 0$ . Тогда из (56) и (55) получаем утверждение леммы.  $\square$

Подставив  $k = m = 0$  в (46), (53), получим уравнения

$$z_{tt\eta} = 0, \quad (58)$$

$$z_{ttt} = 0. \quad (59)$$

Подведем итоги исследования на совместность. Прежде всего заметим, что уравнения (17), (18) при  $N \neq 0$  являются частным случаем уравнений (38), (39). Если же  $N = 0$ , то, очевидно, любое решение (17), (18) будет решением уравнений (58), (59).

Непосредственным вычислением можно показать, что в каждом из рассмотренных случаев все условия совместности будут следствиями уже выписанных уравнений. Это позволяет нам говорить о пассивности полученных систем. Сформулируем результат в виде теоремы. Поскольку в предыдущих рассуждениях под следствиями уравнений мы понимали не только уравнения, полученные дифференцированием исходных, но и уравнения, полученные комплексным сопряжением, то, чтобы не отступать от классического определения пассивной системы [7], при формулировке теоремы следует добавить к некоторым уравнениям комплексно-сопряженные к ним.

**Теорема 1.** *Множество решений системы уравнений (5), (6) является объединением множеств решений следующих пассивных систем:*

- (A) *система состоящая из уравнений: (5) и сопряженного к нему, (48), (58), (59) и сопряженного к нему;*
- (B) *система состоящая из уравнений: (5) и сопряженного к нему, (38) и сопряженного к нему, (39), (48) — с произвольной функцией  $N(\eta)$  не равной тождественно нулю;*
- (C) *система состоящая из уравнений: (5) и сопряженного к нему, (45) и сопряженного к нему, (48), (51) — с произвольными константами  $k$  и  $m$ .*

Следует отметить, что три полученные системы можно преобразовать к эквивалентным пассивным ортономным системам [7]. Однако это сильно усложнит формулы. Вместо этого, будут приведены решения полученных систем.

## 2 Свойства решений

В этом разделе рассматриваются свойства решений системы (1) с точки зрения теории движения идеальной несжимаемой жидкости.

1. В гидродинамике система (1) задает двумерные движения идеальной жидкости с дополнительным условием постоянства давления в частице. Это условие позволяет интерпретировать каждое решение (1), как движение жидкости со свободной границей, определяемой соотношением  $p = 0$ .

2. Несложно проверить, что завихренность

$$\omega = x_t \vee x + y_t \vee y = \beta.$$

Из (9), (20) и Леммы 4 следует, что  $\beta_t = \beta_\xi = 0$ , т.е.  $\beta$  может зависеть только от  $\eta$ . Иными словами завихренность  $\omega = \beta$  и давление  $p = \eta$  связаны функциональным соотношением  $\omega = \omega(p)$ .

3. Получим условия, при которых жидкость ограничена движущейся твердой стенкой. Рассмотрим двумерное движение жидкости, при котором она ограничена некоторой (вообще говоря) движущейся кривой. Будем считать, что в лагранжевых координатах кривая задается уравнением  $\eta = \text{const}$ .

Как известно [8], форма плоской кривой полностью определяется, с точностью до выбора начальной точки отчета дуги, по ее кривизне как функции от натурального параметра  $s$ . Следовательно, кривизна кривой  $\kappa$ , как функция от  $s$  и времени  $t$  должна иметь вид:

$$\kappa = \nu(s - s_0(t)). \quad (60)$$

Здесь  $s_0(t)$  задает выбор начальной точки отчета в зависимости от момента времени, а функция  $\nu$  определяет форму кривой. Нетрудно проверить, что все такие  $\kappa$  удовлетворяют уравнению

$$\kappa_t \kappa_{ss} - \kappa_s \kappa_{ts} = 0. \quad (61)$$

С другой стороны, в общее решение (61) кроме функций вида (60) также входят функции  $\kappa = \kappa(t)$ . Поэтому, условие представимости  $\kappa$  в виде (60) эквивалентно тому, что выполняется (61) и  $\kappa_s \neq 0$ , либо  $\kappa_s = \kappa_t = 0$ .

Вычислим теперь кривизну кривой для рассматриваемой системы. В силу уравнения (5) она задается формулой

$$\kappa = \frac{x_\xi y_{\xi\xi} - y_\xi x_{\xi\xi}}{(x_\xi^2 + y_\xi^2)^{3/2}} = \frac{i(z_\xi \bar{z}_{\xi\xi} - \bar{z}_\xi z_{\xi\xi})}{2(z_\xi \bar{z}_\xi)^{3/2}} = \frac{z_{tt} \bar{z}_{tttt} + \bar{z}_{tt} z_{tttt}}{2(z_{tt} \bar{z}_{tt})^{3/2}}.$$

Переход от производных по натуральному параметру  $s$  к производным по  $\xi$  осуществляется по формуле:

$$\kappa_s = \frac{\kappa_\xi}{s_\xi},$$

где

$$s_\xi = \sqrt{x_\xi^2 + y_\xi^2} = \sqrt{z_\xi \bar{z}_\xi} = |z_\xi|.$$

Поэтому, условие (61) эквивалентно следующему:

$$\kappa_t \left( \frac{\kappa_\xi}{|z_\xi|} \right)_\xi - \kappa_\xi \left( \frac{\kappa_\xi}{|z_\xi|} \right)_t = 0. \quad (62)$$

Определим теперь в каких случаях кривые  $\eta = \text{const}$  на решениях системы (5), (6) можно рассматривать в качестве движущихся твердых стенок.

Для системы А кривизна  $\kappa$  равна нулю, а для системы В

$$\kappa = -N^2(\eta)|z_{tt}|^{-1}.$$

В обоих случаях  $\kappa_s = \kappa_t = 0$ .

Для системы С кривизна задается формулой:

$$\kappa = \frac{ik(\bar{z}_{tt}z_{ttt} - z_{tt}\bar{z}_{ttt}) + (k^2 + m)z_{tt}\bar{z}_{tt}}{(z_{tt}\bar{z}_{tt})^{3/2}}.$$

Непосредственным вычислением можно проверить, что  $\kappa$  удовлетворяет уравнению (62), а также получить следующее соотношение:

$$\kappa_s = \frac{-2k}{|z_{tt}|} \kappa_t.$$

Поэтому, при  $k \neq 0$  производная  $\kappa_s$  обращается в нуль одновременно с  $\kappa_t$ . Если же  $k = 0$ , то очевидно,  $\kappa_s = 0$ . Вычислим

$$\kappa_t = \frac{-m(z_{tt}\bar{z}_{ttt} + \bar{z}_{tt}z_{ttt})}{2(z_{tt}\bar{z}_{tt})^{3/2}} = -m \frac{|z_{tt}|_t}{|z_{tt}|^2}.$$

Итак, форма кривой сохраняется, кроме случая  $k = 0, m \neq 0$ .

Таким образом, для всех решений (5), (6) (исключая решения системы С при  $k = 0, m \neq 0$ ) форма кривой  $\eta = \text{const}$  не меняется со временем. Это означает, что любую из этих кривых можно рассматривать в качестве движущейся твердой стенки.

Для того, чтобы жидкость была ограничена только кривыми  $\eta = p = \text{const}$ , эти кривые не должны иметь самопересечений. Это достигается не всегда.

### 3 Точные решения

Перейдем к построению точных решений. Решения приводятся с точностью до действия группы  $G$ , порождаемой операторами (4) и дискретными преобразованиями обращения времени  $t \rightarrow -t$  и отражения  $\xi \rightarrow -\xi$ ,  $y \rightarrow -y$ .

Решение системы A дается формулой:

$$z = \xi + S(\eta)t + i \left( \eta - \frac{t^2}{2} \right),$$

где  $S$  — произвольная гладкая функция.

Решение системы B:

$$\begin{aligned} z &= S(\eta)e^{i(N(\eta)t - N^2(\eta)\xi)}, \\ S(\eta)S'(\eta)N^2(\eta) &= 1 \end{aligned}$$

Систему C можно значительно упростить с помощью подходящего преобразования из группы  $G$  и введения новой независимой переменной. Положим

$$J = (z_{ttt} - ikz_{tt})\bar{z}_\eta + (\bar{z}_{ttt} + ik\bar{z}_{tt})z_\eta$$

и обозначим левую часть неравенства (50) следующим образом:

$$I = i(z_{tt}\bar{z}_{ttt} - \bar{z}_{tt}z_{ttt}) - 2kz_{tt}\bar{z}_{tt}.$$

Можно проверить, что  $J_t = J_\xi = I_t = I_\xi = 0$  в силу уравнений рассматриваемой системы. Продолжим оператор  $X_1$  на  $J$ :

$$X_1 = \varphi \partial_\xi - I \varphi' \partial_J.$$

В силу условия (50)  $I \neq 0$ . Следовательно, выбрав подходящую функцию  $\varphi$ , можно занулить  $J$  действием оператора  $X_1$ . Из уравнений (48) и  $J = 0$  следует, что

$$\begin{aligned} z_\eta &= 2(iz_{ttt} + kz_{tt})I^{-1}, \\ \bar{z}_\eta &= 2(-i\bar{z}_{ttt} + k\bar{z}_{tt})I^{-1}. \end{aligned}$$

Введем независимую переменную (новую лагранжеву координату)  $\sigma$ , связанную с  $\eta$  соотношением:

$$\eta_\sigma = I = i(z_{tt}\bar{z}_{ttt} - \bar{z}_{tt}z_{ttt}) - 2kz_{tt}\bar{z}_{tt}. \quad (63)$$

Получим систему:

$$\begin{aligned} z_{tttt} &= 2ikz_{ttt} + (k^2 + m)z_{tt}, \\ z_\xi &= iz_{tt}, \\ z_\sigma &= 2(iz_{ttt} + kz_{tt}). \end{aligned} \tag{64}$$

Таким образом, нелинейная система **C** сведена к линейной системе (64) и нелинейному уравнению для определения  $\eta$  (63). Линейная однородная система (64) обладает конечномерным пространством решений. Поэтому для нее можно выписать фундаментальную систему решений (ФСР), которая состоит из четырех комплекснозначных функций. Две из этих функций, а именно,  $z_1 = 1$  и  $z_2 = t$  не зависят от того, какие значения констант  $k$  и  $m$  мы выберем. Вид еще двух функций  $z_3$  и  $z_4$  определяется корнями характеристического уравнения

$$\lambda^4 - 2ik\lambda^3 - (k^2 + m)\lambda^2 = 0,$$

которое строится по первому уравнению (64).

Далее рассматриваются только те решения системы **C**, которые удовлетворяют условиям (11) и (50), т.е. не являются решениями двух предыдущих систем.

**1.** В случае  $m = k = 0$  в ФСР входят функции:  $z_3 = t^3/6 + it\xi + 2i\sigma$ ,  $z_4 = t^2/2 + i\xi$ . Преобразованиями из группы  $G$  решения (63), (64) можно свести к виду:

$$\begin{aligned} z &= t^3/6 - \xi + i(t^2/2 + t\xi + 2\sigma), \\ \eta &= -2\sigma. \end{aligned}$$

**2.** При  $m = -k^2$  в ФСР входят функции:  $z_3 = \exp(2ikt - 4ik^2\xi + 8k^3\sigma)$ ,  $z_4 = t^2/2 + i\xi + 2k\sigma$ . Преобразованиями из  $G$  решения системы (63), (64) можно свести к виду ( $k = 1/2$ ):

$$\begin{aligned} z &= \exp(it - i\xi + \sigma) - \xi + i(t^2/2 + \sigma), \\ \eta &= \exp(2\sigma)/2 - \sigma. \end{aligned}$$

Данное решение отличается от решения, задающего трохоидальные волны Герстнера только слагаемым  $t^2/2$ . Это слагаемое возникает вследствие того, что волны Герстнера описывают движение жидкости в постоянном поле тяжести, а в нашем случае внешние силы равны нулю.



3. Рассмотрим случай  $m < 0$ ,  $m + k^2 \neq 0$ . Положим  $k = (a + b)/2$ ,  $m = -(a - b)^2/4$ . В ФСР входят функции:  $z_3 = \exp(iat - ia^2\xi + a^2(a - b)\sigma)$ ,  $z_4 = \exp(ibt - ib^2\xi + b^2(b - a)\sigma)$ . Преобразованиями из группы  $G$  решения (63), (64) можно свести к виду ( $m = -1$ ,  $k \geq 0$ ,  $k \neq 1$ ):

$$\begin{aligned} z &= \exp(i(k + 1)t - (k + 1)^2(i\xi - 2\sigma)) + \\ &\quad + \exp(i(k - 1)t - (k - 1)^2(i\xi + 2\sigma)), \\ \eta &= ((k + 1)^2 \exp(4(k + 1)^2\sigma) + (k - 1)^2 \exp(-4(k - 1)^2\sigma))/2. \end{aligned}$$

В работе [9] течения такого типа названы *птолемеевскими*.

4. При  $m = 0$  в ФСР входят функции:  $z_3 = \exp(ikt - ik^2\xi)$ ,  $z_4 = (t - 2k\xi - 2ik^2\sigma) \exp(ikt - ik^2\xi)$ . Преобразованиями из  $G$  решения системы (63), (64) можно свести к виду ( $k = 1$ ):

$$\begin{aligned} z &= (t - 2\xi - 2i\sigma) \exp(it - i\xi), \\ \eta &= 2(\sigma^2 + 2\sigma). \end{aligned}$$

5. В случае  $m > 0$ ,  $m \neq k^2$  в ФСР входят функции:  $z_{3;4} = \exp(i(k \pm i\sqrt{m})t - i(k \pm i\sqrt{m})^2(\xi \mp 2\sigma\sqrt{m}))$ . Преобразованиями из группы  $G$  решения (63), (64) можно свести к виду:

$$\begin{aligned} z &= \exp(ie^{\theta i}t - ie^{2\theta i}(\xi - 2\sigma \sin \theta)) + \exp(ie^{-\theta i}t - ie^{-2\theta i}(\xi + 2\sigma \sin \theta)), \\ \eta &= \exp(-4\sigma \sin \theta \sin 2\theta) \cos(2\theta + 4\sigma \sin \theta \cos 2\theta), \end{aligned}$$

где  $\theta$  — некоторая константа такая, что  $\sin \theta \cos 2\theta \neq 0$ ;  $k = \cos \theta$ ,  $m = \sin^2 \theta$ .

6. При  $m = k^2 \neq 0$  в ФСР входят функции:  $z_{3;4} = \exp(k(i \pm 1)t - 2k^2(\pm\xi + 2k\sigma))$ . Преобразованиями из  $G$  решения системы (63), (64) можно свести к виду ( $m = k = 1$ ):

$$\begin{aligned} z &= \exp(i(t - \theta) - 4\sigma - t + 2\xi) + \exp(i(t + \theta) - 4\sigma + t - 2\xi), \\ \eta &= 2 \exp(-8\sigma) \sin 2\theta. \end{aligned}$$

Здесь  $\theta$  — произвольная константа такая, что  $\sin 2\theta \neq 0$ .

## 4 Замечания к статье С.В. Хабирова

В работе С.В. Хабирова [4] рассматривается система аналогичная (2), (3). При исследовании ее на совместность вводятся два бесконечных набора функций  $p_k$ ,  $q_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), которые зависят от времени  $t$  и

лагранжевых переменных  $i$  и  $j$ . В [4] показано, что эти функции удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{aligned} p_0 &= -1, \quad 4p'_{k+1} = p_k''' + (q_k)_j, \quad q'_k = (p_k)_j, \\ p_{k+1}(4p_k p_{k-1} - (p'_{k-1})^2 - q_{k-1}^2) - p_{k-1}(p_k'^2 + q_k^2) + \\ &+ (p'_k p'_{k-1} - q_k q_{k-1})(p''_{k-1} - 2p_k) - p_k(p''_{k-1} - 2p_k)^2 + \\ &+ q'_{k-1}(p'_k q_{k-1} + q_k p'_{k-1} - p_k q'_{k-1}) = 0. \end{aligned} \quad (65)$$

Здесь штрих означает производную по  $t$ , а нижний индекс  $j$  — по соответствующей переменной (в последнем уравнении (65) исправлены допущенные в [4] опечатки).

В Теореме 2 рассматриваемой работы утверждается, что все решения (65) зависят только от  $i$ , иными словами, не зависят от  $t$  и  $j$ . Приведем контрпример к теореме. Зададим функции  $p_k, q_k$  рекуррентными соотношениями:

$$\begin{aligned} p_0 &= -1, \quad q_0 = 0, \\ p_{k+1} &= \frac{p_k'^2 + q_k^2 + h_k s j^{-2k-1}}{4p_k}, \\ q_{k+1} &= \frac{-2p_k'' q_k + 2p'_k q'_k + 4p_{k+1} q_k - h_k t s j^{-2k-2}}{4p_k}, \end{aligned} \quad (66)$$

где  $s$  — произвольная функция от лагранжевой переменной  $i$ , а

$$h_k = 2^{-4k} \prod_{n=0}^{k-1} (s^2 + n^2).$$

В частности, получим:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{-s}{4j}, \quad q_1 = \frac{ts}{4j^2}, \\ p_2 &= \frac{-js^2 - t^2 s}{16j^3}, \quad q_2 = \frac{2tjs^2 + t^3 s}{16j^4}. \end{aligned}$$

Построенные по рекуррентным формулам функции  $p_k, q_k$  удовлетворяют уравнениям (65). Для того, чтобы доказать это, присоединим к (65) следующие уравнения:

$$\begin{aligned} q'_k &= -\frac{tp'_k + 2kp_k}{2j}, \\ p_k'' &= \frac{jp_k'^2 - sp_k^2 + tp_k q_k + jq_k^2 + sj^{-2k} h_k}{2jp_k}. \end{aligned} \quad (67)$$

Таблица 1: Соответствие между решениями

Номер решения	1	2	3	4	5	6	7	8
Номер формулы из [4]	(5.4)	(5.5)	(6.2)	(6.4)	(7.4)	(7.5)	(8.2)	(9.4)
Система	A	C.1	B	C.2	C.4	C.4	C.3	C.6

После этого непосредственной подстановкой функций из (66) в (65) и (67) проверяется обращение этих уравнений в тождества при начальных значениях  $k$ , а также обосновывается, что эти уравнения будут выполнены при любом натуральном  $k$ , в силу справедливости уравнений при меньших  $k$ , иными словами, применяется метод математической индукции.

Рассмотрим теперь решения, полученные в [4]. Запишем их в наших обозначениях:

1.  $z = (t^2 - \eta/2) - (t\alpha(\eta) - 2\xi)i$ ;
2.  $z = (t^3 + 2\xi) - (t^2 - 6t\xi - \eta/2)i$ ;
3.  $z = \beta(\eta) \exp(i(-\xi\alpha^2(\eta) + t\alpha(\eta)))$ ,  $\alpha^2\beta\beta_\eta = 1$ ;
4.  $z = t^2 + 2\ln|\delta| + 2\xi i + \delta \exp(i(t - \xi))$ ,  $\eta = \delta^2/2 - 4\ln|\delta|$ ;
5.  $z = (1 + A \operatorname{tg} \varphi - i(t + 2\xi + A)) \exp(i(-\xi - t))$ ,  
 $\eta = 3A \operatorname{tg} \varphi + A^2(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)/2$ ,  $A \neq 0$ ;
6.  $z = (m + 1 - i(t + 2\xi)) \exp(i(-\xi - t))$ ,  $\eta = 3m + m^2/2$ ;
7.  $z = -iv \exp(i(-\lambda^2\xi + \lambda t)) - iN|v|^{-1/\lambda^2} \exp(i(-\xi + \varphi \pm t))$ ,  
 $2\eta = \lambda^2 v^2 + N^2|v|^{-2/\lambda^2}$ ;
8.  $z = -i \exp(-2\xi + t + it) - \eta \exp(2\xi - t + i(t + \varphi))/(2 \cos \varphi)$ .

В таблице 1 приводится соответствие между решениями из [4] и решениями из данной статьи.

Решение 5 можно свести к решению 6. Действительно, положим в формулах 5  $A \operatorname{tg} \varphi = m$ . Получим

$$z = (1 + m - i(t + 2\xi + A)) \exp(i(-\xi - t)),$$

$$\eta = 3m + (A^2 + m^2)/2.$$

После чего уберем все вхождения константы  $A$  в формулах с помощью сдвигов, порождаемых операторами  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_7$ .

Константа  $N$  в решении 7 не существенна, ее можно взять равной  $\pm 1$ .

Для этого положим  $v = N^{\lambda^2/(1+\lambda^2)}v_*$  и выполним растяжение, порождаемое оператором  $X_{10}$ .

Решения системы C.5 в работе [4] отсутствует.

Автор благодарит О.В Капцова за советы и внимание к работе.

## Список литературы

- [1] Овсянников Л.В. О «простых» решениях уравнений динамики политропного газа // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 2. С. 5–12.
- [2] Нецадим М.В., Чупахин А.П. О некоторых решениях уравнений движения сплошной среды со специальной термодинамикой // Сибирские электронные математические известия. 2011. Т. 8. С. 317–332.
- [3] Овсянников Л.В. Изобарические движения газа // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30, № 10. С. 1792–1799.
- [4] Хабиров С.В. Плоские изотермические движения идеального газа без расширений // ПММ. 2014. Т. 78, № 3. С. 411–424.
- [5] Иногамов Н.А. Движение с «вмороженными» изобарами: трохоидальные волны и изобарическая рэлей-тейлоровская мода // Докл. АН СССР. 1984. Т. 278, № 1. С. 57–61.
- [6] Hearn A. C., Schöpf R. REDUCE User's Manual. Free Version. URL: <http://reduce-algebra.sourceforge.net/manual/manual.html> (дата обращения: 29.08.2016).
- [7] Фиников С.П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М.-Л.: ГИТТЛ, 1948.
- [8] Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.
- [9] Абрашкин А.А., Якубович Е.И. Вихревая динамика в лагранжевом описании. М. Физматлит. 2006.